

# PROBĂ SCRISĂ LA MATEMATICĂ

Sesiunea iunie-iulie 2006

Proba D. Programă M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările  
NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru efectiv 3 ore. Varianta 2

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

## SUBIECTUL I ( 20p )

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $2 - i$ .
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele  $A(-1, 4)$  și  $C(4, -1)$ .
- (4p) c) Să se calculeze suma de numere complexe  $S = i + i^4 + i^7 + i^{10}$ .
- (4p) d) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât punctele  $A(-1, 4)$  și  $C(4, -1)$  să fie pe dreapta de ecuație  $x + by + a = 0$ .
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele  $A(-1, 4)$ ,  $B(2, 2)$  și  $C(4, -1)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât să avem egalitatea de numere complexe  $\frac{5+6i}{6-5i} = a + bi$ .

## SUBIECTUL II ( 30p )

1.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul  $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$ .
- (3p) b) Să se calculeze rangul matricei  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația  $\log_3 x = -1$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $9^x - 27 = 0$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , să verifice relația  $n^3 < 2^n$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 4x^3 + 2x - 2$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 3}{3n^2 - 2}$ .

M1: Filiera Teoretică, sp. Științe ale naturii; Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările Varianta 2

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră numărul real  $\omega = 1 + \sqrt{2}$  și mulțimea  $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ .

Notăm  $\bar{\omega} = 1 - \sqrt{2}$  și cu  $G = \{z \in H \mid \exists y \in H \text{ astfel încât } y \cdot z = 1\}$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $0 \in H$ ,  $1 \in H$ ,  $\omega \in H$  și  $\bar{\omega} \in H$ .
- (4p) b) Să se verifice că  $\omega^2 = 2\omega + 1$ .
- (4p) c) Să se arate că, dacă  $z, y \in H$ , atunci  $z + y \in H$  și  $z \cdot y \in H$ .
- (2p) d) Să se arate că  $\omega \cdot (-\bar{\omega}) = 1$ .
- (2p) e) Să se arate că  $\omega \in G$ .
- (2p) f) Să se arate că mulțimea  $G$  are cel puțin 2006 elemente.
- (2p) g) Să se arate că  $\omega^{2006} \notin \mathbf{Q}$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , definite prin  $f(x) = e^x$  și  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$  și  $g'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $\int_1^2 f^2(x) dx$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\int_1^2 g^2(x) dx$ .
- (2p) d) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției  $g$ .
- (2p) e) Să se arate că  $t^2 e^{2x} - 2t \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}, \forall x > 0$ .
- (2p) f) Integrând inegalitatea de la punctul e), să se arate că

$$t^2 \int_1^2 e^{2x} dx - 2t \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}.$$

- (2p) g) Să se arate că  $\left( \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \right)^2 \leq \int_1^2 e^{2x} dx \cdot \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ .