Probă scrisă la MATEMATICĂ
Sesiunea iunie-iulie 2006

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale şi protecţia mediului, toate specializările

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore. Varianta 2

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța de la punctul $A(0, 2)$ la punctul $B(2, 0)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $cos^2 101 + sin^2 101$.

(4p) **c)** Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime 6.

(4p) **d)** Să se determine conjugatul numărului complex $2 + 5i$.

(2p) **e)** Să se calculeze $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(0, 2)$ şi $B(2, 0)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.

(2p) **f)** Dacă în triunghiul ABC, $AB = 8, AC = 8$ şi $m\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\pi}{2}$, să se calculeze BC.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $4^n < 20$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 4 = 0$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_9 x = 1$.

(3p) **e)** Să se calculeze expresia $E = C_7^2 - C_7^5$.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_1^2 f'(x) dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n + 3}{3n + 2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f = X^2 + 5X + 7$ şi $g = X^2 + 5X + 6$.

(4p) **a)** Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului f.

(4p) **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $x^2 + 5x + 6 < 0$.

(4p) **c)** Să se verifice identitatea $\frac{1}{g(n)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se calculeze suma $S = \frac{1}{g(1)} + \frac{1}{g(2)} + ... + \frac{1}{g(2006)}$.

(2p) **e)** Să se verifice că $f = \left(X + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

(2p) **f)** Să se arate că pentru orice două polinoame $s, t \in \mathbf{R}[X]$, avem relația $g \neq s^2 + t^2$.

(2p) **g)** Să se găsească două polinoame $u, v \in \mathbf{C}[X]$, astfel încât să avem relația $g = u^2 + v^2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se verifice că $f(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ şi $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

(2p) **d)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(2p) **e)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $f(x) + f(x+1) = 1 + e$.

(2p) **g)** Să se arate că există două funcții $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, strict crescătoare, astfel încât $f(x) = g(x) - h(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.