PROBĂ SCRISĂ LA MATEMATICĂ
Sesiunea august-septembrie 2006

PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, specializarea matematică-informatică

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru efectiv 3 ore. **Varianta 5**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $(2+3i)^2$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $C(-1,-1)$ la dreapta $x+y=0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la hiperbola $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$, dusă prin punctul $P(-5,4)$.

(4p) **d)** Să se determine $a>0$, astfel încât punctul $P(-4,-3)$ să se afle pe cercul $x^2+y^2=a$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-3,3)$, $B(-5,5)$ și $C(-1,-1)$.

(2p) **f)** Să se calculeze produsul $(tg1^\circ - tg7^\circ)\cdot(tg2^\circ - tg6^\circ)\cdot\ldots\cdot(tg7^\circ - tg1^\circ)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $25^x+4\cdot 5^x-5=0$.

(3p) **b)** Să se calculeze expresia $C_6^1-C_6^2+C_6^4$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este $f(x)=x^4-x$, să se calculeze $(f\circ f)(0)$.

(3p) **d)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,...,5\}$, să verifice relația $3^n\geq 8n$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma elementelor din grupul $(\mathbf{Z}_{18},+)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=1+ln(x^2+1)$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{sin\,n-cos\,n}{n}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi mulțimile

$H=\{X\in M_2(\mathbf{R})\mid X^2=X\}$ şi $M=\{aA+bB+cC+dD \mid \forall a,b,c,d\in\mathbf{R};\ \forall A,B,C,D\in H\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $E\in H$ şi $I_2\in H$.

(4p) **b)** Să se găsească o matrice $P\in H$, astfel încât $rang(P)=1$ şi o matrice $Q\in H$, astfel încât $rang(Q)=2$.

(4p) **c)** Să se verifice că, $\forall a,b\in\mathbf{R}$ matricele $\begin{pmatrix}1&a\\0&0\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}1&0\\b&0\end{pmatrix}$ sunt din mulțimea H.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in H$, atunci $a+d\in\{0,1,2\}$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $B\in H$ este o matrice inversabilă, atunci $B=I_2$.

(2p) **f)** Să se arate că $M=M_2(\mathbf{R})$.

(2p) **g)** Să se arate că matricea F nu se poate scrie ca o sumă finită de matrice din mulțimea H.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile continue $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ şi $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ şi funcția $h:[0,1]\to\mathbf{R}$, $h(x)=\sqrt{1-x^9}$, unde $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$.

(4p) **a)** Să se arate că $h(x)\ge 1-x^9$, $\forall x\in[0,1]$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 h^2(x)dx$.

(4p) **c)** Să se verifice că $t^2f^2(x)-2tf(x)g(x)+g^2(x)\ge 0$, $\forall t\in\mathbf{R}$ şi $\forall x\in[a,b]$.

(2p) **d)** Integrând inegalitatea de la punctul **c),** să se arate că

$$t^2\int_a^b f^2(x)dx-2t\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\ge 0,\forall t\in\mathbf{R}.$$

(2p) **e)** Să se deducă inegalitatea $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$.

(2p) **f)** Utilizând inegalitatea de la punctul **e)** să se arate că, dacă $u:[0,1]\to\mathbf{R}$ este o funcție continuă, atunci $\left(\int_0^1 u(x)dx\right)^2\le\int_0^1 u^2(x)dx$.

(2p) **g)** Să se arate că aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției h, axa Ox şi dreptele $x=0$ şi $x=1$, este un număr real din intervalul $(0{,}90;0{,}95)$.