# PROBĂ SCRISĂ LA MATEMATICĂ
## Sesiunea august-septembrie 2006



**NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru efectiv 3 ore. Varianta 5**

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

**(4p)** **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $-7+3i$.

**(4p)** **b)** Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(2,1)$ şi $C(1,2)$.

**(4p)** **c)** Să se calculeze suma $S=1+z^3+z^6+z^9$, unde $z=-i\in\mathbf{C}$.

**(4p)** **d)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(2,1)$ şi $C(1,2)$ să fie pe dreapta de ecuație $x+ay+b=0$.

**(2p)** **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2,1)$, $B(1,1)$ şi $C(1,2)$.

**(2p)** **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\frac{2+5i}{5-2i}=a+bi$.

**SUBIECTUL II ( 30p )**

**1.**

**(3p)** **a)** Să se calculeze elementul $\hat{3}^{2006}$ în $(\mathbf{Z}_6,\cdot)$.

**(3p)** **b)** Să se calculeze expresia $E=C_9^3-C_9^6+C_9^9$.

**(3p)** **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $log_4 x=-1$.

**(3p)** **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $8^x-2=0$.

**(3p)** **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n$ din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, să verifice relația $2^n\le 22$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=4x^3+2x+1$.

**(3p)** **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

**(3p)** **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

**(3p)** **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

**(3p)** **d)** Să se arate că funcția $f$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

**(3p)** **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{2n-3}$.

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră $M$ mulțimea matricelor cu două linii şi două coloane şi toate elementele numere naturale şi matricele $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $E\in M$ şi că $I_2\in M$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $A,B\in M$, atunci $A+B\in M$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $A,B\in M$, atunci $A\cdot B\in M$.

(2p) **d)** Să se găsească o matrice $C\in M$, astfel încât $rang(C)=1$.

(2p) **e)** Să se găsească o matrice $D\in M$, astfel încât $\det(D)=2006$.

(2p) **f)** Să se arate că matricea $E$ este inversabilă şi $E^{-1}\notin M$.

(2p) **g)** Să se determine toate matricele $X\in M$, inversabile, cu proprietatea că $X^{-1}\in M$.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $x\in[1,e]$, atunci $(x-1)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e}\right)\ge 0$.

(4p) **c)** Utilizând inegalitatea de la punctul **b)**, să se arate că, dacă $x\in[1,e]$, atunci $\frac{1}{x}+\frac{x}{e}\le\frac{1+e}{e}$.

(2p) **d)** Să se verifice că $\frac{1}{f(x)}+\frac{f(x)}{e}\le\frac{1+e}{e}$, $\forall x\in[0,1]$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $u,v\in\mathbf{R}$, atunci $(u+v)^2\ge 4uv$.

(2p) **f)** Integrând inegalitatea de la punctul **d)**, să se arate că $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx+\frac{1}{e}\int_0^1 f(x)dx\le\frac{1+e}{e}$.

(2p) **g)** Utilizând inegalitatea de la punctul **e)**, să se arate că, $\left(\int_0^1 e^{x^2}dx\right)\cdot\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)\le\frac{(e+1)^2}{4e}$.