Probă scrisă la MATEMATICĂ
Sesiunea august-septembrie 2006

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore. Varianta 5

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanţa de la punctul $A(5,-2)$ la punctul $B(-2,5)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $cos^2 211 + sin^2 211$.

(4p) **c)** Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{6}$.

(4p) **d)** Să se calculeze conjugatul numărului complex $-4+3i$.

(2p) **e)** Să se calculeze $a,b\in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(5,-2)$ şi $B(-2,5)$ să fie pe dreapta de ecuaţie $x+ay+b=0$.

(2p) **f)** Dacă în triunghiul ABC, $AB=4, AC=6$ şi $m\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{\pi}{2}$, să se calculeze BC .

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relaţia $3^n<32$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x+1=0$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale strict pozitive ecuaţia $log_8 x=-2$.

(3p) **e)** Să se calculeze expresia $E=C_5^1-C_5^4+C_5^5$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=4+\frac{1}{x^3}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in(0,\infty)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **c)** Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{3n+2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numărul real $\omega = 2-\sqrt{5}$ şi mulțimea $M = \{a+b\omega \mid a,b\in \mathbf{Z}\}$. Notăm $\overline{\omega} = 2+\sqrt{5}$ şi cu $G = \{z\in M \mid \exists y\in M \text{ astfel încât } y\cdot z = 1\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $0\in M$ şi $1\in M$.

(4p) **b)** Să se verifice că $\omega^2 = 4\omega+1$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $z,y\in M$, atunci $z+y\in M$ şi $z\cdot y\in M$.

(2p) **d)** Să se arate că $(a+b\omega)(a+b\overline{\omega})\in \mathbf{Z}$, $\forall a,b\in \mathbf{Z}$.

(2p) **e)** Să se arate că $\omega\in G$.

(2p) **f)** Să se arate că mulțimea G are cel puțin 2006 elemente.

(2p) **g)** Să se arate că $\omega^{2006}\notin \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = 5+4^x$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se verifice că $f(x)>0, \forall x\in \mathbf{R}$ şi $f'(x)>0$, $\forall x\in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

(2p) **d)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(2p) **e)** Să se arate că $t^2+t+1>0$, $\forall t\in \mathbf{R}$ şi $t^2-t+1>0$, $\forall t\in \mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se verifice identitatea $f'(x) = \frac{1}{2}\left((f'(x))^2 + f'(x)+1\right) - \frac{1}{2}\left((f'(x))^2 - f'(x)+1\right)$, $\forall x\in \mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că există două funcții $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ şi $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, strict crescătoare, astfel încât $f(x) = g(x)-h(x)$, $\forall x\in \mathbf{R}$.