

**Probă scrisă la MATEMATICĂ**  
**Sesiunea august-septembrie 2006**

Proba F. Programă M2. Filiera vocațională, profil Artistic, sp.: Arhitectură, arte ambientale și design ; profil Militar sp. Științe sociale. Filiera teoretică, sp. Științe sociale;

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru efectiv 3 ore. **Varianța 3**

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul  $A(3, -2)$  la punctul  $B(-2, 3)$ .
- (4p) b) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât să avem egalitatea de numere complexe  $(2 + 3i)(4 - i) = a + bi$ .
- (4p) c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime  $\sqrt{12}$ .
- (4p) d) Să se determine conjugatul numărului complex  $12 - 7i$ .
- (2p) e) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât punctele  $A(3, -2)$  și  $B(-2, 3)$  să fie pe dreapta de ecuație  $x + ay + b = 0$ .
- (2p) f) Dacă în triunghiul  $ABC$ ,  $AB = 8$ ,  $AC = 6$  și  $m(\hat{BAC}) = \frac{\pi}{2}$ , să se calculeze  $BC$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

**1.**

- (3p) a) Să se calculeze determinantul  $\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 20 & -3 \end{vmatrix}$ .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $2^n \geq 9$ .
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $16^x - 2 = 0$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația  $\log_6 x = 6$ .
- (3p) e) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $f = X^4 - 2X^2 + 1$  la polinomul  $g = X^2 + 1$ .

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 10 + \frac{1}{x^{10}}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}^*$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) c) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției  $f$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\int_1^2 f(x) dx$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^5}$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și funcția

$$f : \left( \frac{1}{2}, \infty \right) \rightarrow \left( \frac{1}{2}, \infty \right), f(x) = \frac{3x-1}{4x-1}.$$

- (4p) a) Să se verifice că  $A + I_2 = B$ .
- (4p) b) Să se arate că  $A^2 = O_2$ .
- (4p) c) Să se calculeze matricea  $B^2$ .
- (2p) d) Să se arate că, dacă  $x > \frac{1}{2}$ , atunci  $\frac{3x-1}{4x-1} > \frac{1}{2}$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $(f \circ f)(x)$ ,  $x \in \left( \frac{1}{2}, \infty \right)$ .
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  $B^n = I_2 + nA$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x) = \frac{(2n+1)x-n}{4nx+1-2n}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\forall x > \frac{1}{2}$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se verifice că  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se rezolve în  $\mathbf{R}$  ecuația  $f'(x) = 0$ .
- (2p) d) Să se arate că funcția  $f$  are un punct de maxim local și un punct de minim local.
- (2p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (2p) f) Să se verifice identitatea  $f'(x) = \frac{1}{2} \left( (f'(x))^2 + f'(x) + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( (f'(x))^2 - f'(x) + 1 \right)$ ,  
 $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) g) Să se arate că există funcțiile  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ ,  
 astfel încât să avem egalitatea  $f(x) = g(x) - h(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .